

## MATEMATİK EĞİTİMİNDE BİR MODEL: DNR TABANLI ÖĞRETİM

Arş. Gör. Gülçin Oflaz  
Cumhuriyet Üniversitesi  
[erengulcin3@hotmail.com](mailto:erengulcin3@hotmail.com)

### Özet

Matematik eğitimcileri tarafından hangi matematiksel bilginin nasıl öğretileceği hakkında çeşitli modeller ortaya konmuştur. DNR tabanlı öğretim de bu modellerden biridir. DNR; duality (etkileşim), necessity (gereklilik) ve repeated reasoning (muhakeme) kelimelerinin baş harflerinden oluşan bir kısaltmadır. DNR kavram ve iddialarının temelindeki felsefeyi ortaya koyan öncüllerden, bu öncüllerden doğan ve tanımlanan kavramlardan, DNR öncüllerinden çıkan ve kavramları bağlamında oluşan iddialardan meydana gelen ve deneysel çalışmalarla da desteklenen teorik bir çerçeve olarak düşünülebilir. DNR, aslında bildiğimiz öğretim kuramlarını temele alarak matematik bilgisinin yapısını açıklamaya çalışır, matematik öğretimine ve öğrenimine ilişkin birtakım iddialar ortaya atar. Matematik iki kümenin birleşimidir: birinci küme aksiyomlardan, tanımlardan, teoremlerden, problemlerden ve çözümlerinden oluşan anlama yolları; ikinci küme ise ilk kümeyi oluşturan ürünlere ait zihinsel eylemlerin karakteristiğini ifade eden düşünme yollarıdır. Dolayısıyla her seviyede uygulanmakta olan matematik programı anlama ve düşünme yollarının gelişimini amaçlamalıdır. Anlama ve düşünme yollarının gelişmesini sağlamak için de öğrencilerin zihinsel ihtiyaçlarını karşılayacak şekilde, öğrendikleri matematiği içselleştirip, organize edip yeniden düzenlemelerini sağlayacak şekilde bir matematik öğretimi planlanmalıdır.

**Anahtar Sözcükler:** DNR tabanlı öğretim, anlama yolları, düşünme yolları, zihinsel ihtiyaç.

## A MODAL AT MATHEMATICS EDUCATION: DNR BASED INSTRUCTION

### Abstract

Various modals about how to teach, which mathematical knowledge has been established by mathematics tutors. DNR based instruction is a sample for such modals. DNR is an abbreviation of capital letters of the words Duality, Necessity, and Repeated Reasoning. DNR can be regarded as a theoretical base which consists of the premises that explain the logic deep beneath concept and arguments, concepts that are derived from and described with these premises and the assertions deriving from the DNR premises with their concepts; and a theoretical base which is supported by experimental studies. Actually, DNR tries to explain the structure of mathematical knowledge by putting the well known teaching theories to the centre of the matter and establish various theories on teaching and learning mathematics. Mathematics is the combination of two sets: first set is "ways of understanding" that consists of axioms, definitions, theorems, problems and their solutions; the second set is "ways of thinking" that explains the characteristics of the mental acts of the products that composes the first set. Hence, mathematical teaching programmes of every grade must aim to improve these "ways of understanding" and "ways of thinking". To improve the ways of understanding and thinking, teaching mathematics should be planned by supplying the intellectual needs of learners' and by making them acquire, organize and re-organize the learnt mathematical knowledge.

**Keywords:** DNR based instruction, ways of thinking, ways of understanding, intellectual need.

### GİRİŞ

Psikologların üzerinde çalıştığı en önemli konulardan biri öğrenmenin nasıl gerçekleştiği hakkındadır. Bu konuyu, çeşitli teoriler kendi perspektiflerinden ele alarak açıklamaya çalışmaktadırlar. Öğrenme, bir tek

teoriyle açıklanamayacak kadar karmaşık, zihinsel bir süreçtir. Çeşitli teorilerin öğrenme ve öğretme hakkındaki fikirlerini dikkate alarak sınıfta uygulamak, hem öğrenmenin daha etkin gerçekleşmesine yardımcı olmaktadır, hem de öğretmene bu süreci nasıl destekleyeceği konusunda fikir vermektedir (Kennedy, Tipps & Johnson, 2008). Bu noktada çeşitli teorilerin öğrenme ve öğretme hakkındaki fikirlerini dikkate alarak bu fikirlerin matematik sınıflarında nasıl daha etkili kullanılabilirdiğinden yola çıkan ve bu teorileri harmanlayan yaklaşımlara ihtiyaç duyulmaktadır. DNR tabanlı öğretim, kısaca DNR, matematik öğrenimi ve öğretimi ile ilgili temel sorunları anlamaya ve bu sorunları gidermeye yönelik oluşturulan kavramsal bir çerçeve olarak düşünülebilir (Harel, 2010).

Harel, okullarda hangi matematik konularının nasıl öğretilmesi gerektiğinden yola çıkarak DNR tabanlı öğretim modelini önermiştir. DNR; öncüllerden, kavramlardan ve öğretimsel prensiplerden oluşan bir yapıdır. Öncüller, DNR'nin kavram ve öğretimsel prensiplerinin temelindeki felsefeyi; kavramlar, bu öncüller temelinde şekillenen yapıları; öğretimsel uygulamalar ise deneysel çalışmalarla desteklenen ve öğretme eyleminin, öğrenme üzerindeki potansiyel etkisini açıklayan iddiaları açıklamaktadır (Harel, 2008a, 2008b). Dolayısıyla DNR'yi, bu üçlü yapıyı açıklayarak anlamaya çalışmak yerinde olacaktır.

### DNR'nin Öncülleri

DNR'ye göre matematiğin ne olduğu, öğrencide öğrenmenin nasıl gerçekleştiği ve matematik öğretiminin nasıl olması gerektiğine dair fikirlerinin felsefesini bu öncüller oluşturmaktadır. DNR'nin, belirtilen konuları açıklayan 8 öncülü bulunmaktadır. Bu öncüller incelendiğinde, aslında bilinen öğretim ve öğrenme teorilerini temele aldığı görülebilir. Öncüller; matematiği, matematik öğrenmeyi ve öğretimi açıklayan 3 başlık altında incelenebilir;

**1. Matematik:** Plato'ya göre matematik, fiziksel dünyaya uygulanabilen değişmeyen objeleri anlama şeklidir ve sayılar, üçgenler, küreler gibi şekillerle çalışarak bilgi elde etmektedir. Bu bilgileri hangi yolla elde ettiğinin cevabını ise Aristotle vermektedir. Aristotle, kişinin bir bilgiye sahip olması için onun öyle olduğunu ve onun neden öyle olduğunun bilmesinin gerektiğini ifade etmektedir (Lear, 1988). Bu ifade, bizi bilginin iki boyutlu olması fikrine götürmektedir. Bu durumu Sfard (1991), 'matematiksel kavramların ikili doğası' olarak ifade etmekte ve matematiksel bilginin, işlemsel bilgi ve kavramsal bilgidir. İşlemsel bilgi, sayılar üzerinden yürütülen işlemlerin bilgisi olduğundan sonuçta bir sayı elde edilmektedir. Yapısal bilgi ise işlemlerin cebirsel yapılar, ifadeler üzerinden yürütülmesi ile elde edilen bilgidir (Sfard, 1991, Kieran, 1992). DNR de matematiksel bilgi, anlama ve düşünme yolları olarak ifade edilmektedir. Matematik öğretiminde de bu iki bilgi türünün gelişimi amaçlanmalıdır.

**2. Öğrenme:** DNR'nin öğrenmeyi açıklayan öncülleri incelendiğinde, bunların bilinen teorilerden ve özellikle Piaget'nin yapılandırmacılığından oldukça etkilendiği görülebilir. Yapılandırmacılık, matematik eğitimi araştırmacılarının ortak görüşünü yansıtan, öğrenmeyi açıklayan en baskın yaklaşımdır. Bunun neden böyle olduğunu anlamak zor değildir. Yapılandırmacılık; merkeze öğrenciyi alarak öğrencinin kendi bilgisini oluşturma sürecini açıklayan teorik ve rasyonel bir öğrenme kuramıdır. Öğrenme süreci, matematiksel düşünme sürecinin özellikle problem çözme sürecinin nasıl gerçekleştiğini de açıklamaktadır (Skemp, 2002). Matematiksel olan ya da olmayan her bilgi, birey tarafından oluşturulmaktadır. Dolayısıyla her bireyin oluşturduğu kendi bilgisi, kişiye özeldir (Radford, 2008). Piaget'ye göre öğrenme zihnimizde gerçekleşen denge, dengesizlik, yeni bir denge süreci olarak açıklanmaktadır (Piaget, 1964). İnsan zihninde şemalar bulunmaktadır. Şema, bireyin çevresiyle etkileşimi sonucu oluşan ve bu etkileşim sonucunda gelişen davranış ve düşünce kalıplarıdır (Bacanlı, 2009). Birey, yeni bir durumla karşılaştığı zaman, onu öncelikle zihninde var olan şemalarla açıklamaya çalışmaktadır. Bu süreç, özümleme sürecidir. Ancak yeni durumu, mevcut şemayla açıklayamayan birey, zihnindeki mevcut şemasını geliştirerek yeni duruma uygun hale getirecektir. Böylelikle en başta denge halinde olan zihinde, yeni bir durumla karşılaştığında, dengesizlik meydana gelmiştir. Mevcut şemada, yeni durumu açıklamak için meydana gelen düzenleme sürecinin sonucunda, zihin yeniden denge durumuna ulaşmaktadır. Dolayısıyla birey, yeni bilgisini oluşturmuş olur (Senemoğlu, 2005). Zihinde dengesizlik oluşturacak durumlar, zihinsel ihtiyaçlar ve psikolojik ihtiyaçlar olarak belirlenmiştir. Zihinsel ihtiyaçlar, bireyin herhangi bir problem durumuyla karşılaştığında mevcut bilgisini kullanarak çözüme ulaşmasıdır. Psikolojik ihtiyaçlar ise kişinin problem durumuyla karşılaştığında, onu çözmek için istek duyması, ilgisi, gönüllülüğünü işaret etmektedir (Harel, 2008b).

3. **Öğretme:** DNR'nin matematik öğretimi ile fikirleri, Vygotsky'nin sosyal yapılandırmacılığı ile oldukça paraleldir. Vygotsky'e göre (1980) matematik bilgisi, deneyimler ve kültür yoluyla elde edilmektedir. Dolayısıyla öğrenci oluşturduğu bilgilerini de kendi deneyimleriyle elde etmektedir. Öğretmenin görevi ise öğrencinin oluşturduğu bu bilgilerin daha istendik olması için, öğrenciyi yönlendirmektir. Öğrenci bilgisini kendi deneyimiyle elde etmesine rağmen, o konuda uzman birinden, öğretmeninden daha iyi öğrenmektedir. Yani kişinin kendi öğrendikleri ile o konuda uzman biri yardımıyla öğrendikleri arasında mutlaka bir fark olacaktır. Bu farka yakınsak gelişim alanı adı verilmektedir. Öğrencinin bilgisinin daha bilimsel ve daha istendik olması için bir uzman tarafından yönlendirilmeye ihtiyaç duymaktadır. Bu yönlendirme, rutin olmayan problemlerle öğrencinin zihninde çelişki oluşturmak şeklinde olmalıdır. Oluşturulan bu çelişkinin giderilmesiyle yani problemin çözümüyle de öğrencinin zihninde daha üst düzey öğrenme gerçekleştirilmiş olacaktır (Vygotsky, 1980, s.90).

#### **Dnr'nin Kavramları**

DNR, bilginin doğasının ikili yapısından yola çıkarak eylemlerimizi, dolayısıyla zihinsel eylemlerimizi de bilginin doğasına paralel olarak süreç ve ürün olarak ele almaktadır. Dolayısıyla üçlü yapı olarak da nitelenebilen zihinsel eylemler, anlama yolları ve düşünme yolları DNR'nin kavramlarını oluşturmaktadır.

#### **Zihinsel Eylemler**

Zihnimizde gerçekleşen her türlü eylem zihinsel eylemlerimiz olarak adlandırılmaktadır (Harel, 2008c). Günlük hayatımızı sürdürürken gerçekleştirdiğimiz eylemler, matematik problemini çözerken zihnimizde olup bitenler, bir öğrencinin kimya laboratuvarında çözelti hazırlarken gerçekleştirdiği eylemlerin tamamı zihinsel eylemlerimizi oluşturmaktadır. Dolayısıyla yazma, konuşma, problem çözme, genelleme, ispatlama gibi aktiviteler, günlük hayatta ya da bir ders esnasında gerçekleştirdiğimiz zihinsel eylemlerimizden bazılarıdır. Gerçekleştirdiğimiz eylemler, zihnimizde gerçekleşen birtakım süreçler ve bu sürecin sonucunda ortaya konan ürünlerden oluşmaktadır. Bu süreç ve ürünler, düşünme ve anlama yolları olarak adlandırılmaktadır.

#### **Düşünme Yolları ve Anlama Yolları**

Bir zihinsel eylemi gerçekleştirirken, kişinin zihninde olup bitenler sonucu ortaya bir ürün koyduğu söylenebilir. Örneğin; bir problem çözerken zihnimiz birtakım problem çözme stratejilerini kullanarak, ortaya bir ürün yani probleme ait bir çözüm koymaktadır. Şu halde ortaya konan çözüm, problem çözme eyleminin bilişsel ürününü oluşturmaktadır. Bu çözümü ortaya koyarken zihinde olup bitenler, kullandığı problem çözme stratejileri ise bu eylemin karakteristiği olarak ifade edilmektedir. Benzer şekilde zihinsel eylemler kişinin hareketlerinde, söylemlerinde gizlidir. Dolayısıyla söylemleri ve hareketleri, kişinin zihinsel eyleminin bilişsel ürününü oluşturmaktadır. Böyle bir ürün ise kişinin o eyleme bağlı anlama yolları olarak adlandırılmaktadır. Kişinin zihinsel eylem sonucunda oluşan ürününün yani anlama yolunun bilişsel karakteristiği de düşünme yollarını oluşturmaktadır. Örneğin; Harel (2008a) ispatlamayı, ortaya konan ürün ve zihinde gerçekleşen süreçler olarak ele almıştır. Buna göre ispatlama eyleminin sonucunda ortaya konan ürün yani ispat anlama yollarımızı oluşturmaktadır. Bu ürünün ortaya konmasında zihnimizde gerçekleşen her türlü eylem ise ispatlama eyleminin bilişsel özelliğini yani düşünme yollarını oluşturmaktadır. İspatlama eyleminin düşünme yolları ise ispat şemaları olarak adlandırmaktadır.

Zihinsel eylemleri anlama ve düşünme yolları bağlamında ele almak, matematiksel bilginin doğasına da uygun görünmektedir. Zira matematik, konu alanı (subject matter) ve kavramsal araçlardan (conceptual tools) oluşmaktadır (Harel, 2008a). Tanımlar, teoremler, ispatlar, problemler, çözümler matematiğin konu alanını oluşturmaktadır. Bu ürünleri oluşturan zihinsel süreçler ise kavramsal yapıları oluşturmaktadır. Matematik bilgisinin bu ikili yapısı hakkında, araştırmacılar hem fikirdir (Sfard, 1991; Hiebert & Lefevre, 1986; Skemp, 1976). Matematiksel bilgi, işlemlerin bilgisi ile onun altında yatan kavramların bilgisinden oluştuğuna göre matematiksel eylemlerimizi de buna uygun olarak, süreç ve ürün olarak ele almak yerinde olacaktır.

#### **Dnr'nin Öğretim İlkeleri**

DNR'nin matematik öğretimine ilişkin ilkeleri etkileşim, gereklilik ve muhakeme olmak üzere üç kategoride incelenebilir. Harel, anlama ve düşünme yollarının birbirini etkilemesini duality olarak adlandırmıştır. Bu kavram Ursavaş (2014) tarafından etkileşim olarak çevrilmiştir. Anlama ve düşünme yollarının istendik seviyeye ulaşması için, öğrencinin öğrenilecek şeye karşı zihinsel olarak ihtiyaç duyması, gereklilik ilkesinde

incelenmektedir. Geliştirilen anlama ve düşünme yollarının içselleştirilmesi ve organize edilmesi ise muhakeme ilkesinde incelenmektedir.

### Etkileşim

Matematikselsel bilginin iki boyutlu olduğundan bahsedildi. Bunlardan ilki, matematik sorularını çözmekte kullanılan kurallardan, algoritmalarından, işlemlerden, sembollerden oluşan işlemsel bilgi boyutudur. Problemleri çözmek için gerekli olan strateji bilgisi de işlemsel bilgi boyutunda incelenmektedir. Zihindeki mevcut bilgilerle ilişkilendirilmiş olan kavramsal bilgi ise bilgiyi oluşturan parçaların arasında ilişki kurulması ile oluşturulmaktadır. Dolayısıyla kavramsal bilgi, birbiriyle bağlantılı bilgi ağı olarak düşünülebilir (Hiebert & Lefevre, 1986). Bu ilişkilendirme süreci ise yeni bilgi ile mevcut bilgi arasında gerçekleşmektedir. Zihinde bilgi ağının oluşturulması süreci, Piaget'nin bilişsel gelişim kuramını hatırlatmaktadır. Yeni bilginin, mevcut şemanın içine alınmasıyla özümseme süreci gerçekleşmektedir. Yeni bilgiyi açıklamada yeterli olmayan şemada gerekli düzenlemeler yapılarak, yeni duruma uygun hale getirilmektedir. Böylelikle özümseme ve düzenleme süreçlerinin birbirini takip etmesi sonucunda öğrenme gerçekleşmektedir. Bu durumu Piaget, bir örnekle açıklamaktadır. Bir elma yediğimizde vücut tanıdığı faydalı kısımları alıp kullanırken, tanımadığı kısımları posa olarak atmaktadır. Benzer şekilde zihin de bir bilgiyle karşılaştığında onun tanıdığı kısımlarını, benzer şemalarla ilişkilendirmekte yani kullanmaktadır. Oysa tanımadığı kısımları ilişkilendirecek bir bilgi bulamadığından atmaktadır (von Glasersfeld, 1995). O halde yapılması gereken öğrencinin zihninde mevcut şemaları olabildiğince artırmaktır ki yeni bilgiyle karşılaştığında ilişkilendirme yapabilsin ve kavramsal öğrenmeyi gerçekleştirebilsin.

DNR'de matematikselsel bilgi anlama ve düşünme yollarından oluşmaktadır. Anlama yolları; tanımlar, teoremler, ispatlar, problemler ve çözümler gibi ürünleri işaret etmektedir. Düşünme yolları ise bu ürünleri oluşturmak için gerçekleştirilen sürecin özelliklerini işaret etmektedir. DNR' ye göre etkileşim, anlama yollarının üretilmesi ile düşünme yollarının gelişmesi ve tersi olarak üretilen anlama yollarının, düşünme yollarından etkilenmesi demektir (Harel, 2013).

### Gereklilik

Piaget'nin dengeleme kuramına göre öğrenmenin gerçekleşebilmesi için zihinde dengesizlik meydana gelmelidir. Ancak bu yolla öğrenci mevcut bilişsel yapısında düzenlemeler yaparak yeni bir yapı oluşturabilir (Piaget, 1978). Öğrencinin zihninde dengesizlik meydana gelmesi ise zihinsel karışıklık oluşturularak gerçekleşmektedir. Öğrenci, var olan bilgisiyile çözemeyeceği problem durumuyla karşılaştığında, mevcut şemasını o problemi açıklamak için düzenleme yoluna gidecektir. Harel'a göre öğrenciler karşılaştıkları problem durumuna karşı zihinsel olarak ihtiyaç duyduklarında öğrenme daha etkili gerçekleşmektedir (Harel, 1998). DNR' ye göre birey, psikolojik ve zihinsel olarak ihtiyaç duyduğunda, karşılaştığı bilgiyi öğrenmek istemektedir. Bir problem durumu ile karşılaştığında, birey mevcut bilgisinde gerekli düzenlemeler yaparak yeni bir bilgi elde etmektedir. Bu sayede de zihinsel ihtiyacını gidermiş olmaktadır. Bireyin karşılaştığı problem durumunu çözmek için istek duyması, sebat etmesi ise bireyin psikolojik ihtiyaç boyutunu oluşturmaktadır (Harel, 2008b). Öğrencilere sunulan problem durumları zihinlerinde dengesizlik oluşturacak şekilde ve çözmeye ihtiyaç duyacakları şekilde düzenlenmelidir. Ancak bu şekilde yeni düşünme ve anlama yolları geliştirmeleri sağlanabilir.

### Muhakeme

Öğrenme, yeni bilginin mevcut şema içine alınarak özümsemesi ve mevcut şemanın yeni bilgiyi açıklamak için düzenlenmesi süreçlerinin devamlılığı ile gerçekleşmektedir. Bilişsel yapıların oluşturulmasında ve yeniden düzenlenmesi sürecinde tekrarlanan deneyimlerin rolü büyüktür. Dolayısıyla deneyim ve pratikler, öğrencilerin matematikselsel bilgilerinin organize ederek yeniden düzenlemelerine yardım etmektedir (Cooper, 1991). Benzer şekilde DNR de tekrarlanan deneyimlerin, öğrencilerin bilgilerinin yeniden düzenleyip içselleştirmelerinin önemine vurgu yapmaktadır. Ancak tekrarlanan deneyimler, salt pratikler olarak kabul edilmemelidir. Öğrencilere yeni düşünme ve anlama yolları geliştirebilecekleri, zihinsel ihtiyaçlarını giderecekleri problem durumları sunmak gerekmektedir. Ancak böyle yapılırsa, öğrenciler öğrendikleri kuralı pratik etmek yerine mevcut bilgilerinin düzenleyerek yeni düşünme ve anlama yolları geliştirebilirler.

## SONUÇ

DNR, çeşitli öğrenme teorilerini temele alarak, bu teorilerin matematiğe, öğrenmeye ve öğretmeye dair fikirlerini harmanlayan, bu sayede okullarda hangi matematiğin nasıl öğretilmesi gerektiğine cevap arayan bir öğretim yönergesi olarak düşünülebilir. Öğrencilere hangi matematiğin öğretilmesi sorusunun cevabı etkileşim prensibinde gizlidir. Matematik öğretimi, öğrencilerin anlama ve düşünme yollarının her ikisinin de gelişimini amaçlamalıdır. Oysa günümüzde öğrencinin ortaya koyduğu ürünlerin yani anlama yollarının gelişimine daha çok önem verildiği bilinmektedir. Bunun böyle olmasındaki en önemli nedenler arasında sınav kaygısı, yetiştirilmesi gereken içerik (Baki & Kartal, 2002) gibi sebepler gösterilebilir. Tek başına anlama yollarının gelişimi, matematik öğretimi açısından bir anlam ifade etmeyecektir. Çünkü anlama yollarının gelişimi, düşünme yollarının gelişimini; düşünme yollarının gelişimi de anlama yollarının gelişimini sağlamaktadır. Bu etkileşim sayesinde de öğrencide matematiksel bilgi geliştirilmektedir. O halde bir diğer önemli soru da matematiksel bilginin nasıl geliştirileceğidir. Bu sorunun cevabı da gereklilik ve muhakeme ilkelerinde saklıdır. Öğrenciye sunulan problem durumları, onların zihinsel ve psikolojik ihtiyaçlarını karşılayacak şekilde oluşturmalıdır. Problem çözme, öğrenmenin tek yoludur (Harel, 2008b). Çünkü öğrenci problem çözerken, zihninde karışıklık meydana gelmektedir. Oluşan bu karışıklık sonucunda da yeni bilgi oluşturmaktadır. Öğrencide düşünme ve anlama yollarını geliştirdikten sonra, bu bilgilerin yeniden düzenlenip, içselleştirilip organize edilmesi gerekmektedir. Dolayısıyla öğrenciye oluşturduğu bilgilerini içselleştirecekleri, muhakeme edecekleri problem durumlarının sunulması gerekmektedir.

**Not:** Bu çalışma 27- 29 Ekim 2016 tarihlerinde Antalya'da 7 ülkenin katılımıyla düzenlenen World Conference on Educational and Instructional Studies- WCEIS'de bildiri olarak sunulmuştur.

## KAYNAKÇA

Bacanlı, H. (2009). *Eğitim Psikolojisi*. Ankara: Asal Yayınları.

Baki, A., ve Kartal, T. (2002). Lise öğrencilerinin cebir bilgilerinin kavramsal ve işlemsel bilgi bağlamında değerlendirilmesi. *UFBMEK Bildiri Özetleri Kitabı*, 211.

Cooper, R. (1991). The role of mathematical transformations and practice in mathematical development. In L. Steffe (Ed.), *Epistemological Foundations Of Mathematical Experience*. New York: Springer-Verlag.

Harel, G. (1998). Two dual assertions: The first on learning and the second on teaching (or vice versa). *The American Mathematical Monthly*, 105(6), 497-507.

Harel, G. (2008a). DNR perspective on mathematics curriculum and instruction, Part I: focus on proving. *ZDM*, 40(3), 487-500.

Harel, G. (2008b). A DNR perspective on mathematics curriculum and instruction. Part II: with reference to teacher's knowledge base. *ZDM*, 40(5), 893-907.

Harel, G. (2008c). What is mathematics? A pedagogical answer to a philosophical question. *Proof And Other Dilemmas: Mathematics And Philosophy*, 265-290.

Harel, G. (2010). DNR-based instruction in mathematics as a conceptual framework. In *Theories of Mathematics Education* (pp. 343-367). Springer Berlin Heidelberg.

Harel, G. (2013). DNR-Based curricula: The case of complex numbers. *Journal of Humanistic Mathematics*, 3(2), 2-61.

Hiebert, J., & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (pp. 1-27). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Kennedy, L. M., Tipps, S. & Johnson, A. (2008). *Guiding children's learning of mathematics*. USA: Thomson Wadsworth.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In D.A. Grouws (Ed.), *Handbook Of Research On Mathematics Teaching And Learning* (pp. 390-419). New York, NY: Macmillan.

Piaget, J. (1964). Development and learning. In R. E. Ripple & V. N. Rockcastle (Eds.), *Piaget Rediscovered*, ss. 7-20.

Piaget, J. (1978). *Behaviour and evolution*. New York: Pantheon Books.

Radford, L. (2008). Theories in mathematics education: A brief inquiry into their conceptual differences. *Report of Survey Team*, 7.

Senemoğlu, N. (2005). *Gelişim öğrenme ve öğretim*. Ankara: Gazi.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies In Mathematics*, 22(1), 1-36.

Skemp, R. (1976). Instrumental understanding and relational understanding. *Mathematics Teaching*, 77, 20-26.

Skemp, R. R. (2002). *Mathematics in the primary school*. Routledge.

Ursavaş, N. (2014). EGS (DNR) tabanlı öğretim yönergesi kullanılarak öğretmen adaylarının sahip oldukları biyolojik anlama şekilleri ve düşünme yollarının geliştirilmesi. Doktora Tezi, Karadeniz Teknik Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.

von Glasersfeld, E. (1995). *Radical constructivism, a way of knowing and learning*. London: The Falmer Press.

Vygotsky, L. S. (1980). *Mind in society: The development of higher psychological processes*. Harvard University Press.